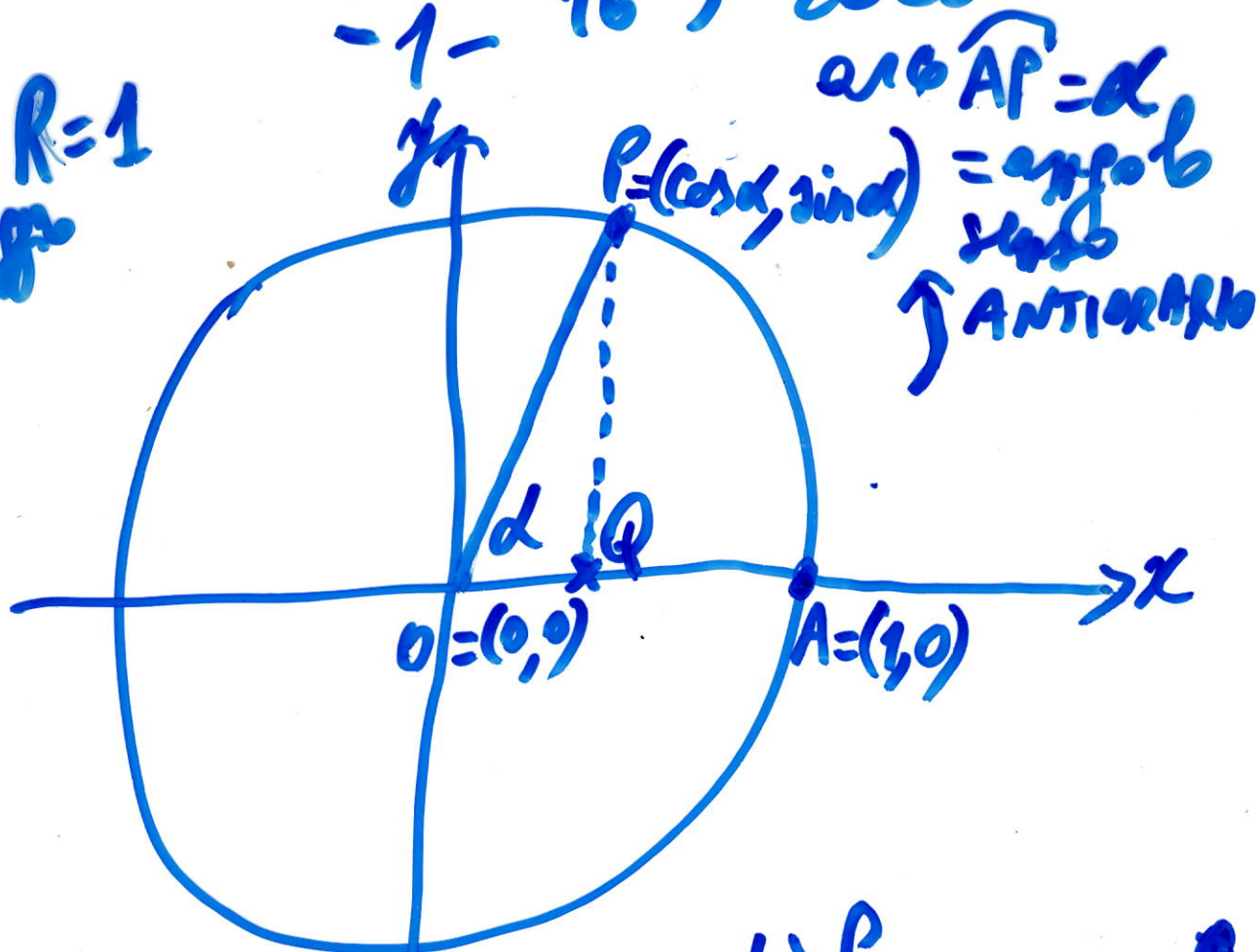


-1- 16-9-2025

$R=1$
raggio



$\cos \alpha = OQ = x_p$ = ascissa di P

$\sin \alpha = QP = y_p$ = ordinata di P

Teorema di PITAGORA Triang. OQP

$$OQ^2 + PQ^2 = OP^2$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

IDENTITÀ FONDAMENTALE

$x_p^2 + y_p^2 = 1$, cioè $x^2 + y^2 = 1$, è l'

EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA
GONIOMETRICA (centro (0,0) e raggio 1)

libro (non necessario) PATRIA-ZANGHIRATI
MATEMATICA

-2- 16-9-2025

Si chiama, dato un angolo α , $\text{tg } \alpha$
(tangente di α) la quantità

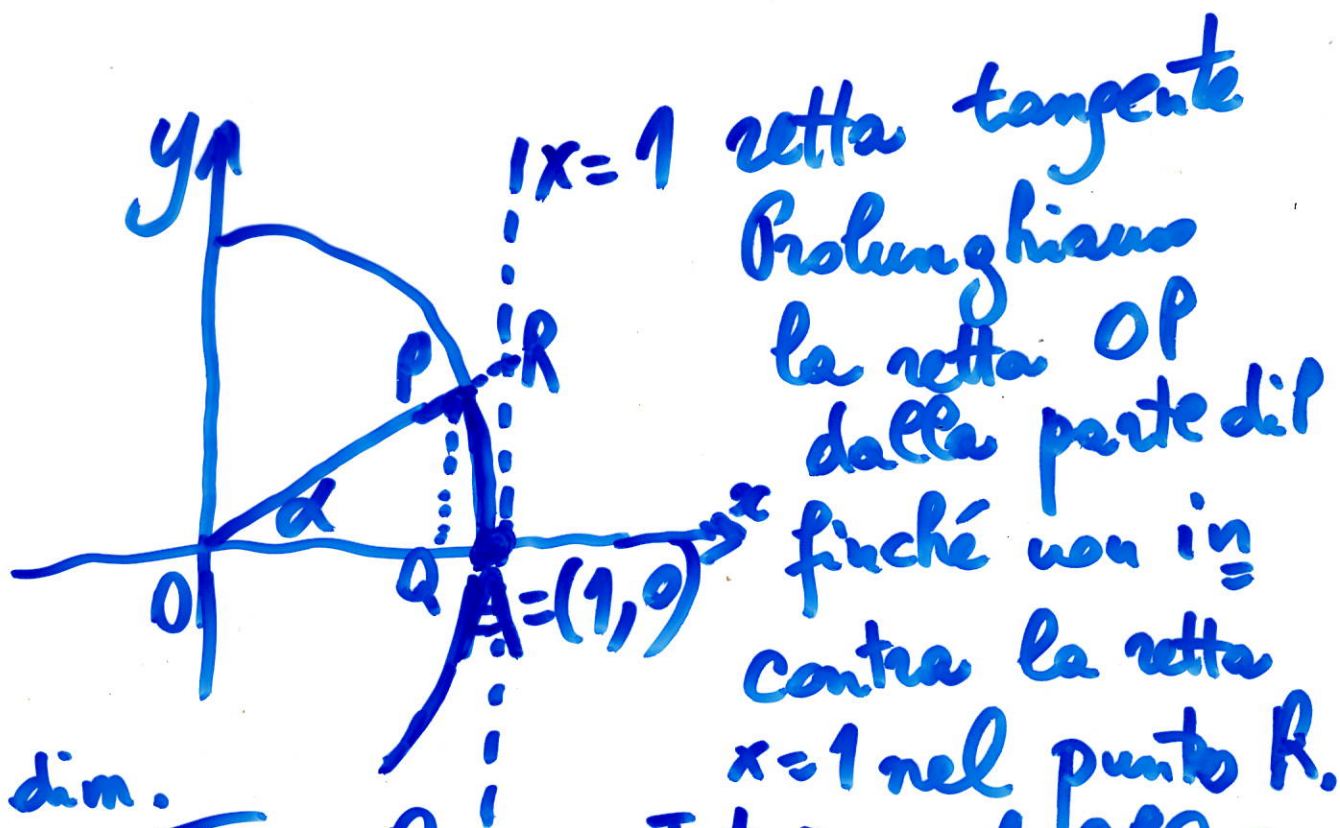
$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

purché abbia senso
(cioè $\cos \alpha \neq 0$)

cotangente di α

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

purché abbia senso
(cioè $\sin \alpha \neq 0$)



Da dim.

$\text{tg } \alpha = \overline{AR}$ Prova: I triangoli OPQ e
 ORA hanno l'angolo α in comune e
hanno un angolo retto ($\widehat{OQP}, \widehat{OAR}$)
Quindi hanno 2 angoli uguali.

-3-

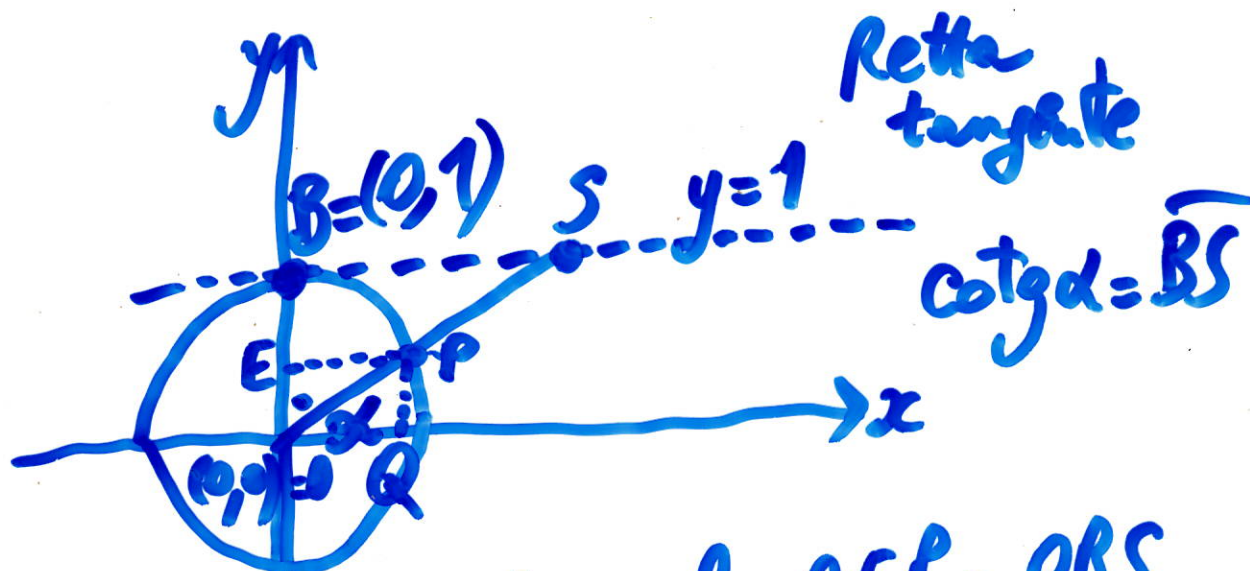
16-9-2025

Ma allora hanno tutti e 3 gli angoli uguali, perché il terzo angolo è dato dalla differenza tra 180° e la somma degli altri due. Quindi, avendo tutti e 3 gli angoli uguali, i due triangoli sono SIMILI, allora hanno i lati in proporzione

$$\frac{PQ}{PQ} = \frac{AR}{OA},$$

cioè $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{AB}{1(\text{raggio})} = AR$, ossia

$\text{tg } \alpha = AR$ $\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ dove ha SENSO



I triangoli rettangoli OEP e OBS sono simili, perché hanno 2 angoli uguali ($\widehat{BOS}$ e $\widehat{EOP}$), e i due angoli

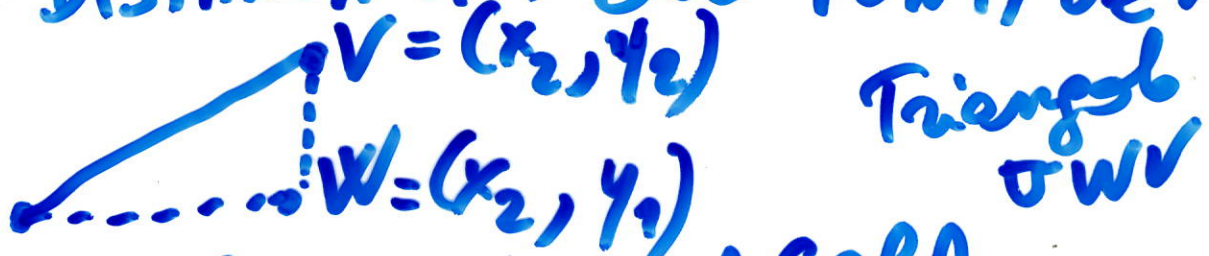
-4- 16-9-2025

RETTI $\triangle OEP$ e $\triangle OBS$, quindi hanno tutti
 e 3 gli angoli uguali (sono SIMILI), quindi
 hanno tutti i lati in proporzione

$$\frac{BS}{OB} = \frac{EP}{OE} = \frac{OA}{QP} \text{ (rettangolo)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cotg \alpha$$

 $\frac{BS}{OB} = \cotg \alpha$, cioè $\cotg \alpha = \frac{BS}{1} = BS$ perché
 $OB=1$ (perché è il RAGGIO) $\cotg \alpha$
 $\parallel BS$

DISTANZA FRA DUE PUNTI, U e V



Teorema di PITAGORA

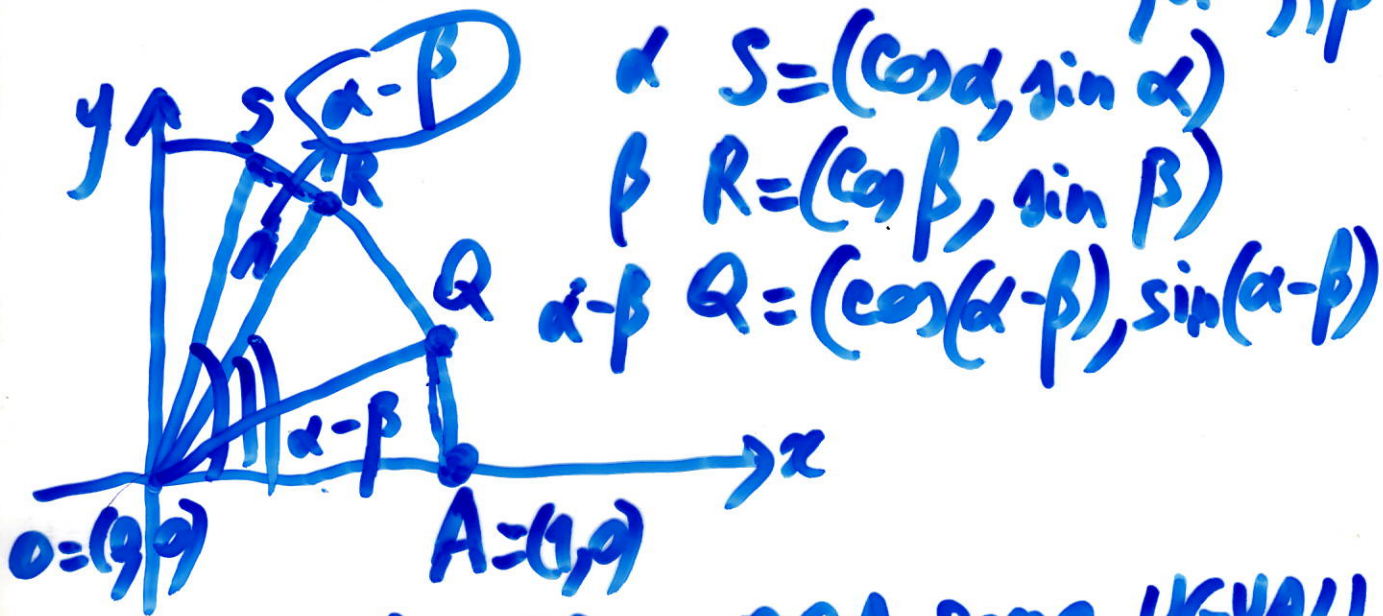
$$\overline{UV}^2 = \overline{UW}^2 + \overline{WV}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{UV} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

distanza UV = RADICE QUADRATA
 DELLA SOMMA DEI QUADRATI
 DELLE DIFFERENZE DELLE COOR-
 DINATE OMONIME

16-9-2025-5- FORMULE BASILARI

FORMULA DI sottrazione del
COSENO $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
senza restrizione I Quadrante $\alpha > \beta$



I triangoli OSR e OQA sono UGUALI
(cioè CONGRUENTI, perché hanno uguali
due lati (due raggi, $\overline{OS}, \overline{OR}, \overline{OQ}, \overline{OA} = 1$)
e l'angolo compreso, cioè $\alpha - \beta$: 1°
CRITERIO DI CONGRUENZA). Quindi
anche i rispettivi terzi lati sono UGUALI
(cioè $\overline{SR} = \overline{AQ}$). Consideriamo ora
le distanze SR e AQ . Per non mette
re le RADICI, consideriamo $\overline{SR}^2$ e $\overline{AQ}^2$.
Allora $SR^2 = AQ^2$.

$$-6- \quad 16-9=2025$$

$$\overline{SR}^2 = \overline{AQ}^2$$

$$S = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad R = (\cos \beta, \sin \beta)$$

$$Q = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)) \quad A = (1, 0)$$

$$I) \overline{SR}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 =$$

$$= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2$$

$$II) \overline{AQ}^2 = \overline{QA}^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 +$$

$$+ (\sin(\alpha - \beta))^2 \quad \overline{SR}^2 = \overline{AQ}^2, \text{ cioè}$$

$$\frac{\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \beta +}{+ \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta} = \frac{(\cos(\alpha - \beta))^2 +}{1 - 2 \cos(\alpha - \beta) + (\sin(\alpha - \beta))^2} \text{ cioè}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta =$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - 2 \cos(\alpha - \beta) \text{ Divido per } -2$$

si ha $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$
 cioè la formula, che è quindi dimostrata.

-7-

16-9-2025

Le altre formule sono

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Formule di addizione del coseno,

di ADDIZIONE del seno, di

SOTTRAZIONE DEL SENO.

Quello che non dimostro, come queste formule, è lasciato per casa come

esercizio, come se LA DIMOSTRAZIONE
FACESSE PARTE INTEGRANTE DELL'
ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE!!!

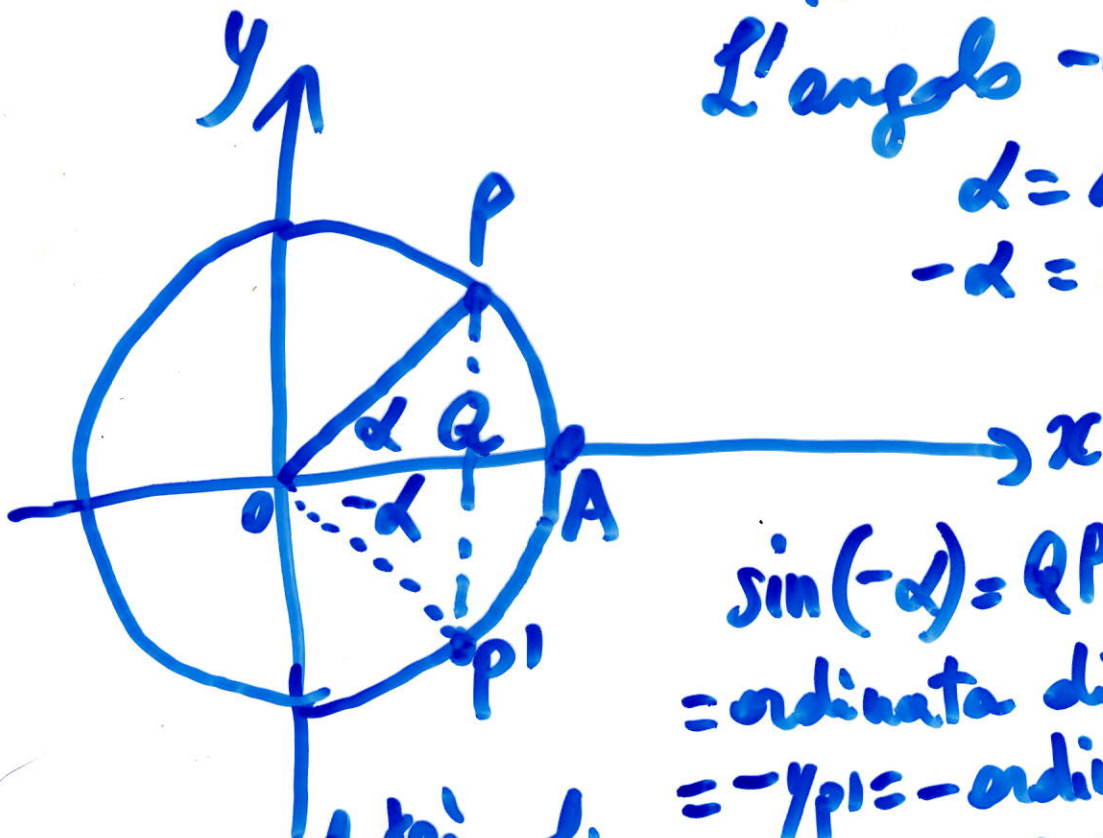
16-9-2025

-8-

PROPRIETÀ

L'angolo $-\alpha$

$\alpha = \widehat{AP'}$ antior.
 $-\alpha = \widehat{AP}$ orario



$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= QP' = \\ &= \text{ordinata di } P' = y_{P'} = \\ &= -y_P = -\text{ordinata di } P \\ &\text{PER SIMMETRIA //} \\ &= -\sin \alpha\end{aligned}$$

Infatti, ^{tri}gli angoli
 OQP e OQP' sono UGUALI.

Quindi $\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin \alpha}$

$\boxed{\cos(-\alpha) = \text{ascissa di } P' = \text{ascissa di } P = OQ = \cos \alpha}$

$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos \alpha}$

Il coseno è una funzione PARI
 cioè $f(-\alpha) = f(\alpha)$ dove ha senso

-9-16-9-2025
Il seno è una funzione

DISPARI, cioè $f(-\alpha) = -f(\alpha)$
dove ha senso.

Si ha, dove ha senso:

$$\boxed{\text{tg}(-\alpha)} = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} =$$
$$= \boxed{-\text{tg} \alpha} \text{ La tangente è una funzione}$$

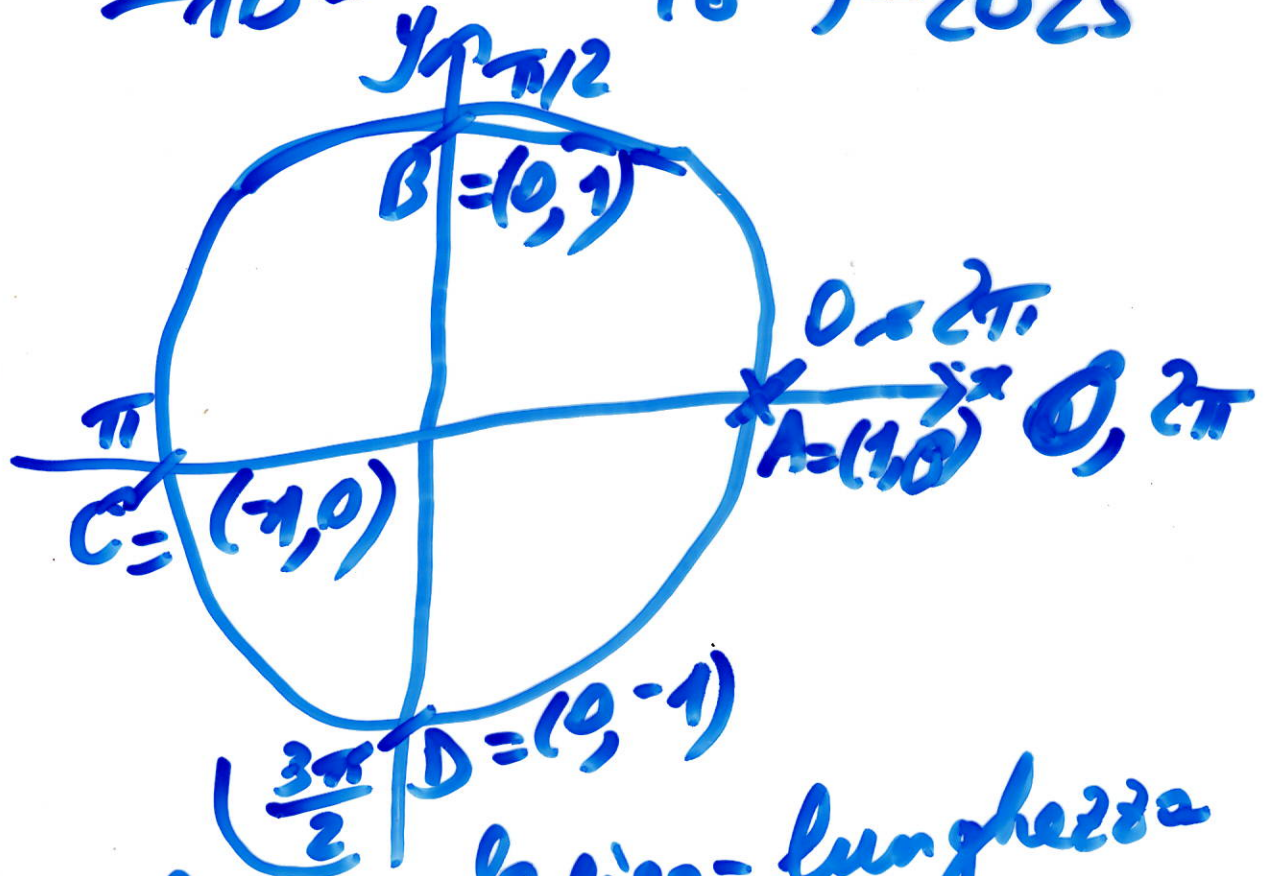
ne DISPARI

$$\boxed{\text{cotg}(-\alpha)} = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} =$$

$$= -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \boxed{-\text{cotg} \alpha} \text{ Anche la}$$

cotangente è una funzione DISPARI

-10- 16-9-2025



$360^\circ = \text{angolo giro} = \text{lunghezza}$
 di tutta la circonferenza
 geometrica (di raggio 1), cioè
 $2\pi = 2\pi$ radianti (radianti,
 vuol dire: lunghezza dell'
 arco) (2π è $2\pi \cdot 1 = 2\pi R$,
 con $R=1$)
 $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$ (ascissa di A)
 $\sin 0 = \sin 2\pi = 0$ (ordinata di A)
 $\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$ $\cot 0$ non esiste
 perché $\frac{\cos 0}{\sin 0} = \frac{1}{0}$ non esiste

-11- 16-9-2025

180° = angolo piatto = metà circonferenza = $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$ radianti

cos π = ascissa di C = -1

sin π = ordinata di C = 0

90° = angolo retto = $\frac{1}{4}$ di circonferenza =

retta = $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ radianti

punto B: cos $\frac{\pi}{2}$ = 0 = ascissa B

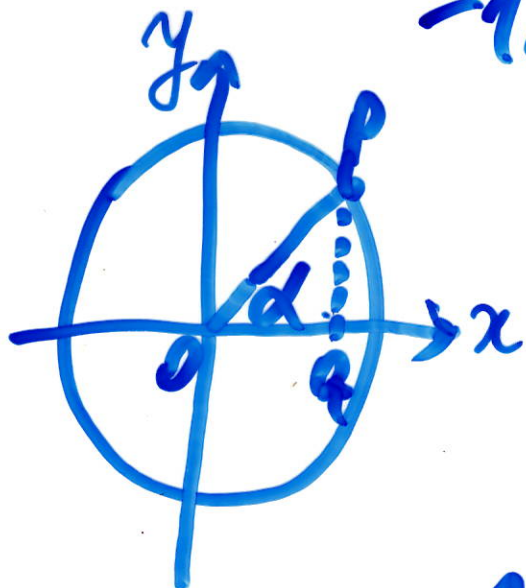
sin $\frac{\pi}{2}$ = 1 = ordinata di B

270° = $\frac{3}{4}$ di circonferenza =

$\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ cos $\frac{3\pi}{2}$ = 0, ascissa di D

sin $\frac{3\pi}{2}$ = -1, ordinata di D

-12- 16-9-2025



$$\alpha = 45^\circ = \frac{1}{8} \text{ di}$$

$$\text{circonferenza} =$$

$$2\pi \cdot \frac{1}{8} = \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

L'angolo $\angle OPQ$ è $90^\circ = \frac{\pi}{2}$

L'angolo $\angle POQ$ è $180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) =$
 $= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. $\angle POQ$: gli

angoli sono $90^\circ, 45^\circ$ e 45° , allora
 il triangolo è RETTANGOLO e

ISOSCELE, quindi i 2 cateti
 sono uguali, cioè $\overline{OQ} = \overline{PQ}$, cioè
 $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$: chiamiamolo L .

Per l'identità fondamentale, si ha
 $L^2 + L^2 = \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 \quad 2L^2 = 1$

$$L^2 = \frac{1}{2} \text{ (valori positivi)} \quad \boxed{L} = +\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} =$$

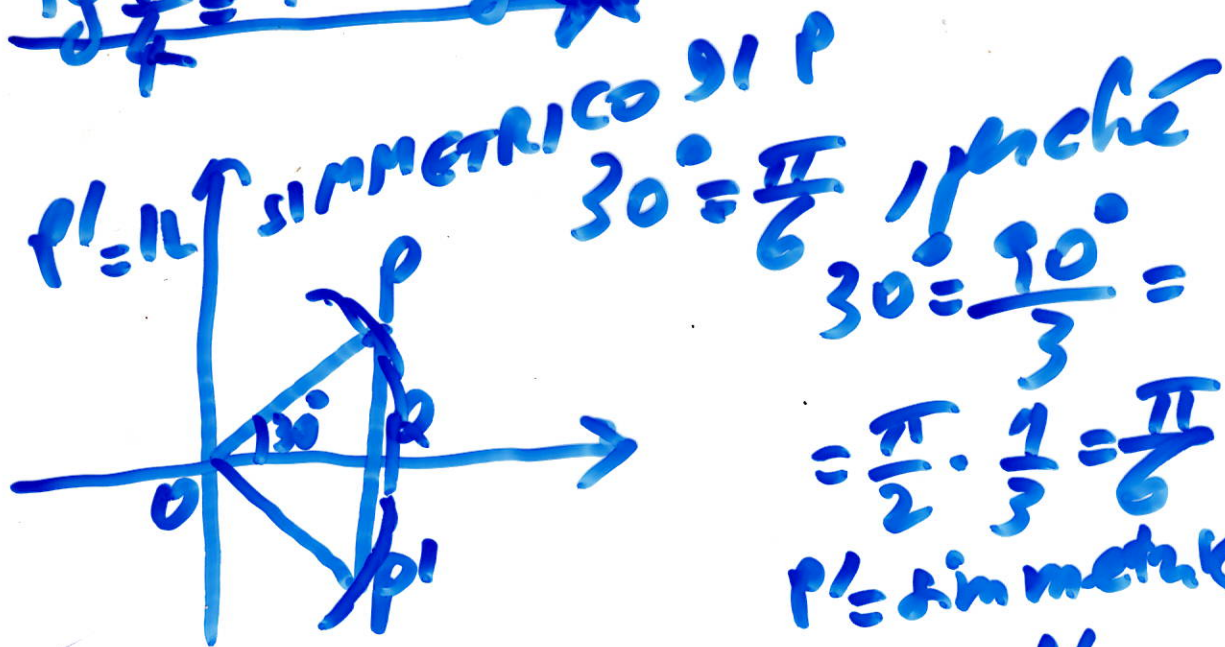
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

16-9-2025

-13-

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 = \cot \frac{\pi}{4}$$



L'angolo $\widehat{OQP}$ è 90° . L'angolo $\widehat{OPQ}$, ora $\widehat{OPP'}$, è $180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Per simmetria, l'angolo $\widehat{OP'Q} = \widehat{OPP'} = 60^\circ$, e l'angolo $\widehat{POP'}$ è $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. Il triangolo OPP' è equilatero e quindi $PQ = \frac{1}{2} PP' = \frac{1}{2} OP = \frac{1}{2}$

(sim.) $\frac{1}{2}$ $\perp$ RAGGIO

$PQ = \text{ordinata } P = \sin 30^\circ$

Quindi $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 30^\circ = 1/2$ -14- 16-9-2025

$\cos 30^\circ$ की है? ज्ञात है:

$$(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 = 1, \text{ किन्तु}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\cos 30^\circ)^2 = 1$$

$$(\cos 30^\circ)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \boxed{\sqrt{3}}$$

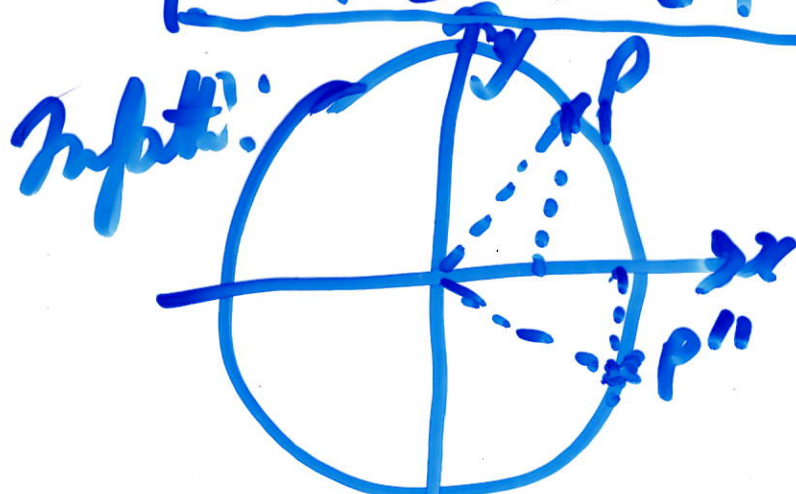
-15- 16-9-2025

Come esercizio a pag. 22 di
Parte 1 Testo abbozzato dimostrare
che $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,
 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vedere che

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \alpha \leq 1 \\ -1 &\leq \cos \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

 per ogni
angolo
 α



sia l'
ascissa
sia l'ordi-
nata di ogni

punto della circonferenza
goniometrica sono comprese
tra -1 ed 1